

POSSIBILITA' E LIMITI DELLA COSMONAUTICA (1)

GAETANO ARTURO CROCCO

Accademico Pontificio

Svmmarivm — *Simpliciore algorithmi relativistici forma, quam Auctor praebebat, nautae per totum cosmicum iter, quod constanti ineatur acceleratione et constanti deceleratione ad finem perducatur, possunt ex sola propellentis materiae deminutione et consumptione astronomicas coordinatas cognoscere, omnino neglectis suis coordinatis relativisticis.*

Il problema della Cosmonautica è stato di recente risollevato da una interessante memoria del dott. Eugenio Sànger, presentata al VII Congresso Astronautico, tenutosi in Roma nel decorso settembre.

Nella suddetta memoria si pone l'accento sulla brevità della vita umana di fronte alla immensità delle vie del Cosmo; ed applicando alla Cosmonautica le Teorie della Relatività ristretta si dimostra che questa brevità non costituisce ostacolo a percorrere le massime distanze intersiderali da parte di un singolo uomo.

Non è mia intenzione, in questa Nota, di riaprire discussioni sulla Teoria della Relatività ristretta, che ritengo esclusivo compito dei matematici.

Bene ha detto Francesco Severi rispondendo alle obiezioni di Quirino Maiorana in una recente seduta della Accademia Nazionale dei Lincei quando ha affermato che nessun fenomeno fisico contrasta attualmente alla coerenza matematica di questa Teoria: e che sarà la Matematica stessa a rielaborarla il giorno in cui dovessero insorgere fenomeni fisici contrastanti.

Questa coerenza matematica e la perfetta concordanza di alcuni fenomeni fisici coi postulati della Relatività ristretta di cui si serve la Cosmonautica sono ormai correntemente impiegati nel calcolo degli *acceleratori nucleari* di protoni ed ampiamente discussi nell'interessante volume *Cinquant'anni di relatività* che ripresenta in bella veste le Memorie fondamentali di Einstein con il commento di fisici, matematici, astronomi e filosofi.

¹ Nota dall'Accademico Pontificio S.E. Gaetano Arturo CROCCO, presentata nella riunione del 20 Maggio 1957

Io mi propongo soltanto con questa Nota di presentare agli studiosi ed ai tecnici una formulazione semplificata dell'algoritmo relativistico applicato alla «Cosmonautica».

Ho trovato infatti che lo studioso ed il tecnico, anche limitandosi alla Relatività ristretta ed alle trasformazioni di Lorentz, trova qualche difficoltà a dedurre la consistenza dei fenomeni tecnici della Cosmonautica e le sue possibilità dalla trascendente simbologia adottata dai principali trattatisti.

Una tale simbologia è certamente necessaria in una generale dimostrazione matematica: ma, ottenuta la dimostrazione, è opportuno di manipolare le formulazioni finali in modo da introdurvi e rendere evidenti i *fattori realistici* dei quali si deve interessare lo studioso nelle applicazioni di quelle formulazioni; e dai quali dipendono i limiti delle possibilità delle applicazioni stesse.

Così anche si potrà evitare la continua alternativa tra coordinate terrestri e coordinate del volatore; nonché il ricorso ad alcuni parametri fittizi del volo che introducono una certa perplessità nelle conclusioni.

Ciò premesso incominciamo col riferirci alle coordinate di tempo e di luogo valide sulla Terra ed in Astronomia. Misuriamo dunque i tempi in anni terrestri e gli spazi in anni-luce. Consideriamo un *percorso astronomico* tra due astri di cui uno corrisponderà al punto di partenza e l'altro al punto di arrivo; e supponiamo di volerlo percorrere a velocità crescente da zero sino a un valor massimo dell'ordine di grandezza della velocità della luce. Orbene: è canone fondamentale del rendimento energetico dei razzi che la velocità del getto propulsivo necessaria a conseguire una certa velocità massima di cammino del veicolo debba essere dello stesso ordine di grandezza di quest'ultima. Nel nostro caso dunque anche la velocità del getto, misurata rispetto alla sua bocca di uscita, deve essere prossima a quella della luce. Un simile risultato è ormai di pratica corrente nelle macchine acceleratrici della Fisica nucleare.

Il ciclotrone di Brookhaven genera getti di protoni ionizzati la cui velocità si approssima a meno del 3% alla velocità della luce; ed il protosincrotrone della CERN a Ginevra, calcolato e progettato secondo le leggi della Relatività ristretta, produrrà getti di protoni a meno di *un millesimo* della velocità della luce.

Ma le energie comunicate a tale scopo all'unità di materia lanciata, che rasentano l'ordine di grandezza della totale energia contenuta secondo Einstein nell'unità di materia, sono prese dall'esterno. Nel razzo occorre prenderne dall'interno per convogliarle nel veicolo propulso: trarle comunque da una materia che si trasporta.

E purtroppo oggi la fissione nucleare ci dà soltanto la millesima parte della energia postulata da Einstein.

Riuscirà la tecnica del razzo a totalizzarla o quanto meno ad approssimarsi a tale risultato?

Dobbiamo necessariamente essere ottimisti. La Fisica è in crisi: ma dalle crisi tutti gli organismi sogliono uscire rinnovellati. Se non fossimo ottimisti non riusciremmo neanche a concepire la Cosmonautica; perché le attuali risorse di energia nucleare, quando saranno disponibili tecnicamente, basteranno appena ai viaggi interplanetari.

E quindi adottiamo la stessa ipotesi che Eugenio Sängner ha posto a base della Memoria da lui presentata al Congresso Astronautico di Roma: e cioè che la velocità del getto propulsivo di una cosmonave sia così prossima a quella della luce da potersi introdurre nei calcoli *identicamente uguale*. Adotteremo quindi per indicarla il simbolo vc ; dove v è il rapporto fra velocità del getto e velocità della luce; ponendo, con Sängner, $v = 1$.

Questa ipotesi *limite* ha il grande vantaggio che le conclusioni alle quali si perverrà daranno la chiave delle *possibilità limiti* della Cosmonautica.

L'osservatore terrestre, alla stazione di partenza della cosmonave, quando questa è ancora *a riposo* sulla Terra potrà controllare questo valore del getto, riferendolo alla bocca d'uscita dell'effusore e verificare i congegni di alimentazione che ne debbono assicurare la costanza. Subito dopo la cosmonave si lancerà nello spazio e dopo qualche istante sarà fuori dall'atmosfera e dalla gravità; pur obbedendo ancora per un certo tempo alle leggi della meccanica classica. Il che vuol dire che in tutto quel tempo non esisterà alcuna divergenza fra le misure meccaniche da parte dell'equipaggio e quelle compiute alla stazione di partenza.

Sarà dunque identica, sia per i volatori che per gli osservatori terrestri, la legge fondamentale dell'astronautica classica, *senza forze esterne*, che regola i veicoli di massa variabile

$$(1) \quad \frac{v}{c} = \ln \frac{M_0}{M} = \ln R ; (\text{classica})$$

dove il denominatore c sostituisce, per l'assunzione precedentemente fatta, il consueto simbolo della velocità del getto; v indica la velocità di cammino del veicolo; che qui è identica sia misurata da bordo che da terra; M_0 rappresenta la totale massa

di partenza, cioè la massa al tempo zero; ed M la massa corrente dopo un certo tempo, t , terrestre, che sarà identico al tempo, t_e , dell'equipaggio. Col simbolo R indicheremo pertanto il *rapporto di massa*, spesso chiamato rapporto di consumo; di cui in [1] si prende il logaritmo neperiano.

La (1) è valida sino a velocità di cammino dell'ordine di un quinto della velocità della luce, con approssimazione inferiore ad un centesimo. Solo dopo incomincia la divergenza relativistica.

Tale divergenza è stata dapprima precisata da Esnault Pelterie in un caso particolare, che fra poco chiariremo, concernente la legge di erogazione del propellente ossia la *portata* del getto. Poi, qualche anno dopo, è stata indagata da Ackeret⁽²⁾ nel caso generale di una legge di erogazione qualsiasi, con la sola condizione che la velocità del getto rimanesse sempre *costante* rispetto alla bocca d'uscita. La dimostrazione di Ackeret è stata poi ripresa da Krause⁽³⁾ e da Sängner⁽⁴⁾.

Ed eccone la generica formulazione nel caso di assenza di forze esterne:

$$\frac{v}{c} = \beta = \frac{R^{2v}-1}{R^{2v}+1} \text{ (relativistica)}$$

con v = rapporto tra velocità del getto e velocità della luce; e per $v = 1$:

$$(2) \quad \frac{v}{c} = \beta = \frac{R^2-1}{R^2+1}$$

La fig. 1 riproduce per un breve tratto la (1) e la (2); mostrando, con particolare evidenza, come in meccanica classica la velocità *astronomica* (cioè rispetto al percorso astronomico) della cosmonave possa subito raggiungere e superare la velocità della luce; mentre in meccanica relativistica essa tenda rapidamente al valore asintotico $v = c$ senza poterlo mai raggiungere.

Come ho accennato, si suppone che la cosmonave parta dallo stato di riposo ed arrivi allo stato di riposo. Dunque *accelera* sino alle prescritte velocità: e *frena* questa velocità prima dell'arrivo. È quanto fanno tutti i mezzi di locomozione. Ma nel caso cosmonautico è stato introdotto, convenzionalmente, un concetto particolare

²Helvetica Phisica Acta - Vol. XIX, Fasc. 2, 1946

³Astronautica Acta - Vol. II, Fasc. I, 1956

⁴Zur Mechanic der Photonen - Strahlantriebe: Januar 1956

denso di risultati. Si sopprime qualsiasi tratto intermedio a velocità uniforme e si inizia il *frenamento* a metà *percorso*, appena raggiunta la massima velocità.

Si apre così la possibilità, in qualsiasi momento, di controllare in volo la velocità di cammino; perché basta introdurre una legge, preventivamente definita, che connetta la velocità col percorso astronomico, per ottenere a bordo il controllo del percorso stesso attraverso la *misura del consumo*. Infatti la velocità è determinabile attraverso il rapporto R , che deriva dal consumo: e quindi anche il percorso si potrà avere in funzione di R .

La legge che si cerca è quella che disciplina, a bordo, l'*accelerazione* o la *decelerazione* durante il cammino. E la sua più semplice espressione è evidentemente quella della loro *costanza*.

Osserviamo subito che le suddette possibilità di individuare il percorso attraverso i consumi di bordo è connessa alla validità della (1) e poi della (2); validità che è una prerogativa particolare dei moti nel vuoto e senza attrazione newtoniana.

Essa quindi non può applicarsi né alla aeronautica né alla locomozione interplanetaria: e solo, con le suddette ipotesi, alla cosmonautica.

Poniamo dunque $\pm a_e = \pm a_o$ costante; indicando con a_e l'accelerazione a bordo e con a_o l'accelerazione *iniziale* a terra.

Il viaggio si intenderà, come abbiamo accennato, per metà ritardato con inversione del getto propulsivo. Si partirà dunque dal riposo e si giungerà al *riposo*; e si manterrà rigorosamente costante l'accelerazione o la decelerazione mediante un *regolatore automatico*, installato a bordo della cosmonave.

La fig. 2 chiarisce la dinamica del viaggio, supposto nel vuoto e senza forze gravitazionali esterne. A bordo si risente soltanto la forza propulsiva del getto: e quindi il rapporto tra questa forza e la massa corrente, m , della cosmonave. Poiché la massa m va diminuendo a causa del consumo di propellente; e quindi l'accelerazione risentita dal veicolo dipende dal rapporto della forza propulsiva alla massa m ; così basta mantenere costante questo rapporto agendo sulla portata del getto. A ciò provvede un servo-comando della portata che ne insegue la variazione mediante lo spostamento di una massa costante μ elasticamente trattenuta, e soggetta all'accelerazione a_e .

Poiché tanto m quanto μ , risentono identicamente l'accelerazione a_e ; e risentiranno identicamente entrambe il successivo aumento relativistico di massa, così il regolatore di costanza dell'accelerazione misurata a bordo può ritenersi concettualmente perfetto.

Applichiamo ora questo prezioso strumento al caso della (1) cioè della meccanica *classica*. Qui non c'è divario fra le misure di bordo e quelle che si possono attribuire agli osservatori terrestri. Chiamando con a (senza indice) l'accelerazione riscontrata da terra sarà

$$a = a_Q = a_e = \text{costante}$$

Se con s chiamiamo la metà del percorso astronomico da compiere, ponendo con Sänger $2s = S$; potremo scrivere, essendo $v = \beta c$ per la (1):

$$s = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a_e} = \frac{1}{2} \frac{\beta^2 c^2}{a_e}$$

cioè

$$(3) \quad \frac{2a_0 s}{c^2} = (\ln R)^2$$

che ci dà la cercata relazione tra *percorso* e *consumo* nella prima parte del viaggio; a velocità classiche.

Conviene subito esprimerla più semplicemente indicando il percorso s (che è metà del totale) con n anni-luce. Un anno luce è uguale a θc ; dove si ha $\theta = 31,5$ milioni di secondi. Cosicché si potrà scrivere la (3) con

$$(4) \quad 2\alpha n = (\ln R)^2 = \beta^2$$

avendo posto adimensionalmente

$$(5) \quad \alpha = \frac{(\theta a_e)}{c}$$

Una espressione analoga si ottiene per il tempo terrestre $t = \theta \tau$ ed è data da

$$(6) \quad \alpha \tau = \beta = \ln R$$

ma non serve allo scopo della navigazione stimata. Queste espressioni valgono sino a *un quinto* della velocità della luce.

Si potranno riferire a un particolare α : e porre anche per semplicità di calcolo $\alpha=1$; che corrisponde ad $a_e = 9,5 \text{ m/sec}^2$; cioè pressoché eguale a g .

Si ottiene allora come limite della formulazione *classica*, per $\beta = 0,2$: $n = 0,02 = 32$ volte il semiasse del sistema solare.

Il pilota, valutando dal consumo il rapporto $R = 1,2214$ può quindi conoscere con precisione quando cessa il campo della meccanica classica. La (6) fornisce poi il tempo, di 73 giorni, identico a quello terrestre.

Passiamo ora al caso *relativistico*. Qui non solo i tempi, ma anche le accelerazioni non hanno più la corrispondenza classica tra le misure di bordo e quelle, eventuali, terrestri. Sänger e Krause (5) ne hanno diligentemente formulate le espressioni relativistiche: e le hanno indicate in varia forma, ricorrendo spesso alle funzioni iperboliche.

Noi riprodurremo quelle che occorrono al nostro tema adottando le nostre notazioni, cioè ricorrendo alla nostra posizione (5) ed esprimendola in anni, τ , per i semi-tempi terrestri; ed in anni luce, n , per i semi-percorsi astronomici.

Al posto della (4), classica, otterremo allora la relativistica del percorso

$$(7) \quad \alpha n = \frac{(R-1)^2}{2R}$$

ed al posto della (6) classica, otterremo la relativistica del tempo

$$(8) \quad \alpha \tau = \frac{R^2-1}{2R}$$

Evidentemente la (7) e la (8), ed in generale tutte le espressioni relativistiche in R , possono sostituirsi in ogni caso alle espressioni classiche corrispondenti, fin dall'inizio del viaggio.

Come si vede, il cosmonauta non ha bisogno di conoscere il proprio tempo relativistico né la propria velocità relativistica; e neanche la accelerazione relativistica terrestre che disciplina quella velocità.

Egli valuta il suo *percorso astronomico*, che è quello che lo interessa, mediante la conoscenza del rapporto di consumo R misurato a bordo; e dell'*accelerazione*, a_e , *rilevata a bordo*; che gli fornisce il valore di α . Se l'accelerazione è quella che risulta dalla (5) nel caso di $\alpha = 1$ il pilota si trova non solo in ottime condizioni fisiologiche perché viaggia con peso molto vicino a quello che risentiva sulla

⁵ Lavori Citati

Terra; ma riesce a compiere con un prontuario assai semplice una *navigazione stimata* irriproducibile con i mezzi locomotori terrestri soggetti alle forze ed alle perturbazioni esterne.

Egli viene così a determinare con sufficiente precisione il momento in cui la cosmonave raggiunge la *metà percorso* e quindi la massima velocità; ed in cui deve perciò capovolgere il veicolo come se dovesse tornare indietro. Da quel momento incomincia la decelerazione, per freno balistico; ma il consumo continua ad indicare, nello stesso senso astronomico di prima, il percorso che ora si va compiendo a velocità decrescente. Dalla valutazione di R, ottenuta misurando volumetricamente il consumo, quale si deduce dal vuotamento dei serbatoi, egli saprà il momento in cui rientra nel campo classico e quello in cui la cosmonave tornerà in riposo, rispetto alla Terra da cui è partito. Solo preventive calcolazioni astronomiche sui moti propri dell'Astro presso il quale è giunto potranno indicargli se tale *riposo* si verifica anche nei riguardi di questo Astro; mentre locali misure astronomiche, valide entro i limiti dell'effettivo stato di riposo, potranno convalidare o meno la precisione e l'entità del cammino percorso.

La conclusione che si può ricavare dalle formule precedenti è meritevole di segnalazione. Esse appaiono infatti non soltanto come espressione algoritmica di un metodo di *navigazione stimata* che la Tecnica potrà rendere perfetto perché è concettualmente impeccabile; ma appaiono altresì come una singolare presentazione delle attuali considerazioni relativistiche.

Prescindendo per ora dai tempi, che non figurano necessariamente nella formula di navigazione, e considerando soltanto i *percorsi* che vi appaiono intrinsecamente, rileviamo che tali percorsi sono riferiti a coordinate terrestri, o astronomiche, che dir si voglia; mentre ad essi si contrappongono l'accelerazione ed i consumi riferiti a misure volumetriche di bordo.

È questa la singolare formulazione che viene ad evitare uno dei principali paradossi della Teoria relativistica: cioè quello che va sotto il nome di *reciprocità* delle apparenze. Il paradosso riguarda la *contrazione delle distanze* e la *dilatazione dei tempi* nei reciproci rapporti tra osservatori terrestri e cosmonautici, e proviene dalla postulazione astratta che il viaggiatore relativistico non sente direttamente il proprio moto e può supporre di star *fermo* mentre tutto l'Universo si muova in senso opposto a velocità quasi-luce. Se ne inferisce che contrazioni e dilatazioni relativistiche

svaniscono per simmetria e rimangono così eleganti artifici del pensiero matematico; dal quale si elude in definitiva una qualsiasi conclusione realistica.

Consentitemi un esempio di grossolana portata. C'è una locomotiva ferroviaria che corre in rettilineo tra due stazioni. Applichiamo il principio di reciprocità. È il treno che corre o le stazioni? Il macchinista è suggestionato dal tranello del suo pensiero, in un istante in cui la locomotiva procede per esempio senza scosse né altri segni della sua velocità, come dentro la nave descritta da Copernico nel suo libro immortale *De revolutionibus orbium celestium*.

E il macchinista dice al fuochista: «Noi siamo *fermi*: sono le stazioni che camminano verso di noi! Ed è la stessa cosa: muoversi colla locomotiva e giungere alla prossima stazione equivale ad attendere che la stazione arrivi a noi; mentre stiamo sulla locomotiva *ferma*».

Ma il fuochista, che sta impalando carbone nel focolare, gli risponde: «Già! Ma come mai consumiamo tanto carbone, stando fermi?».

E non ha torto! Perché le realtà evidenti del fenomeno sono appunto la *distanza* fra le stazioni, per coloro che stanno a terra; e il *carbone consumato* a percorrerla per quelli che stanno sulla locomotiva.

È questa concettualmente la nostra formulazione. Noi abbiamo scritto, misurando le distanze in anni-luce,

$$n = \frac{(R - 1)^2}{2R}$$

dove per comodità espositiva abbiamo posto eguale all'unità il fattore di accelerazione, α .

Voi ritrovate i due termini della strada ferrata. Da un lato, nel simbolo n , vi è la *strada cosmica* e dall'altro il *carbone* del razzo, contenuto nel simbolo R . Questo sistema eterogeneo non ha reciprocità.

Passiamo ora alla durata del semi-viaggio che per $a = i$ abbiamo scritto, analogamente,

$$\tau = \frac{R^2 - 1}{2R}$$

e che potremmo anche riferire ad n scrivendo

$$(9) \quad \frac{\tau}{n} = \frac{R-1}{R+1}$$

come si ottiene dalle due espressioni precedenti e che ha il vantaggio espositivo di non contenere esplicitamente α .

Qui τ sono gli *anni terrestri* di durata del semi-viaggio corrispondente ad n anni-luce.

Attraverso il consumo, calcolando il rapporto R , il cosmonauta può dunque esattamente conoscere il tempo terrestre, τ ; diciamo meglio, il tempo astronomico. Egli può continuare a pensare ed argomentare come se proseguisse senza conoscere la relatività. È come una navigazione stimata in tempo di nebbia. E la nebbia è la relatività. L'orologio di bordo appare guasto e segna un tempo proprio τ_e , inferiore a τ . Per il cosmonauta il solo cronometro, che segna ancora il tempo terrestre, è il consumo di bordo. Ed è anche il contachilometri. Anzi il tempo appare connesso dalla (9) al conta- chilometri indipendentemente dall'accelerazione. A che giova conoscere il tempo relativistico τ_e ?

Tuttavia la questione relativistica sorge automaticamente perché impegna la vita stessa dell'equipaggio. E bisogna ricercare la durata τ_e per il cosmonauta.

Evidentemente τ_e non corrisponde alla *dilatazione* relativistica che si riferisce al moto uniforme. Se la velocità della cosmonave fosse uniforme i tempi dell'osservatore terrestre starebbero a quelli dell'equipaggio nel rapporto

$$(10) \quad \nabla = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

con β =costante.

Qui il moto è variabile, in particolare uniformemente accelerato o ritardato, e dobbiamo quindi calcolare τ_e quale risultato di una integrazione della espressione differenziale

$$(11) \quad \alpha d\tau_e = \frac{\alpha d\tau}{\nabla}$$

Ora si deduce dalla (2) e dalla (10), eliminando β ,

$$(10 \text{ bis}) \nabla = \frac{1+R^2}{2R}$$

che risulta omogenea con tutte le altre da noi scritte e rivela la stretta dipendenza della dilatazione relativistica dal rapporto di consumo R .

Se ne deduce che V col crescere di R tende a divenirne la metà; e presto raggiunge tale valore.

Dalla (8) si trae agevolmente

$$(10 \text{ ter}) \nabla = \sqrt{1 + \alpha^2 \tau^2}$$

Sicché la (n) fornisce, integrandola fra 0 e τ_e

$$\alpha \tau_e = \ln \left(\alpha \tau + \sqrt{1 + \alpha^2 \tau^2} \right)$$

e, tenendo conto della stessa (8); conduce alla preziosa e semplice formulazione

$$(12) \quad \alpha \tau_e = \ln R$$

che rientra nel tipo di tutte le altre nostre formulazioni: e rivela che anche il tempo dell'equipaggio, a parità di α , è unicamente funzione del rapporto di consumo; cioè prende la veste di una realtà; misurabile a bordo attraverso un'altra realtà.

Se poi si confronta la (12) con la (7) o la (8) si trovano le due importanti relazioni

$$\frac{n}{\tau_e} = \frac{(R-1)^2}{2R \ln R}; \quad \frac{\tau}{\tau_e} = \frac{R^2-1}{2R \ln R}$$

le quali hanno il vantaggio espositivo che il rapporto dei tempi terrestri al tempo proprio relativistico dell'equipaggio, nonché il rapporto della semi-distanza n , astronomica, a detto tempo proprio sono entrambi esplicitamente indipendenti da α .

La variabile R si dimostra così di uso generale; e può sempre sostituirsi alla variabile ∇ tenendo conto della (10-bis).

In alcune formulazioni la ∇ è tuttavia matematicamente più espressiva e funzionale. Così ad esempio se si vuol dedurre l'espressione della accelerazione a che determina in coordinate terrestri il valore della velocità v secondo la relazione generica

$$a = \frac{dv}{dt}$$

si ottiene mediante agevoli trasformazioni, tra i limiti $a_0 = a_e$ ed a ,

$$a = \frac{a_0}{\nabla^3}$$

semplice espressione della accelerazione *longitudinale* relativistica; che si va riducendo in ragione del *cubo della dilatazione*; mentre esprimendola in funzione di R si ottiene una legge meno semplice.

Il simbolo R sinora adoperato rappresenta una variabile da computare lungo il viaggio. Chiamiamo ora R_F il suo valore alla fine del semi-viaggio: e poniamo $R_F = 10$ ed $\alpha = 1$.

Risulterà per *metà viaggio*

$$n_f = \frac{81}{20} = 4,05 \text{ anni luce};$$

$$\tau_f = \frac{99}{20} = 4,95 \text{ anni terrestri};$$

$$\tau_e = \ln 10 = 2,3 \text{ anni dell'equipaggio};$$

L'intero viaggio durerà il doppio su un percorso doppio. L'equipaggio varcherà cioè la distanza complessiva di 8,1 anni-luce, misurata in unità astronomiche, mentre avrà registrato come tempo proprio dei consumi di bordo soltanto 4,6 anni.

Si ha l'illusione di muoversi a una velocità propria di tre quarti superiore alla velocità della luce. Eugenio Sàngerha saputo introdurre con molta abilità matematica alcuni di questi parametri fittizi nella sua trattazione. Ha anche introdotto rapporti fittizi di velocità che ha denominato *numeri di Einstein*, perché corrispondono a velocità superiori alla luce come i «numeri di Mach» corrispondono a velocità superiori al suono. Noi abbiamo seguito invece la via di eliminare dal ragionamento

corrente questi parametri astratti, lasciandoli al solo ragionamento matematico, per adottare invece parametri concreti.

Ed ora occorre, infine, affrontare sia pur brevemente il problema dei consumi totali per orientare la mente indagatrice verso le grandi difficoltà della Cosmonautica.

Per essere *ottimisti* occorre, in altri termini, conoscere queste difficoltà ed affrontarle con mezzi adeguati, tanto più che sono ora ottenuti in un caso di ipotesi *limite*.

Il simbolo R_f rappresenta il consumo mediante un rapporto di pesi che si può in generale rappresentare con

$$(14) \quad R_f = \frac{q_f + c}{q_f}$$

dove q_f è il peso finale della cosmonave quando ha esaurito il carico di propellente C.

Se la cosmonave è diretta ad un astro designato, o meglio ad un pianeta che ne sia il satellite; e sa di potersi fermare e poi rifornirsi sul posto; si può dire che compie un viaggio di *sola andata*. Questo viaggio per una distanza $2n$ anni-luce sarà compiuto in *due stadi*. Uno di accelerazione e un secondo di decelerazione. Alla fine di quest'ultimo la cosmonave si potrà immaginare come scarica di propellente ed in questo caso, il suo *peso a vuoto* potrà indicarsi con q . Conoscendolo si calcolerà il rapporto '

$$R_2 = \frac{q + C_2}{q}$$

che ci fornirà il propellente necessario al frenamento, se è prefissato R_2 .

Sicché quando la cosmonave parte dalla Terra per varcare la metà della distanza in accelerazione essa dovrà avere già a bordo questo carico C_2 di propellente

che deve portare intatto sino a metà percorso; quindi dovrà partire con un carico di propellente G_1 da consumare fino a metà percorso dato da:

$$R_1 = \frac{c + C_2 + C_1}{q + C_2}$$

che si ottiene sostituendo a q_f la somma di q e di C_2 .

E' agevole constatare che, a parità di rapporto di consumo, cioè per $R_1 = R_2$ si avrà in *partenza*, riferendosi al peso a vuoto, q ,

$$R_0 = \frac{q + C_1 + C_2}{q} = \frac{q + C_1 + C_2}{q + C_2} \frac{q + C_2}{q} = R_1 R_2 = R^2$$

Ricavasi per $R_1 = R_2 = R$

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{C_2} &= R ; & C_2 &= q(R - 1); \\ C &= C_1 + C_2 = q(R^2 - 1) ; \end{aligned}$$

che determina il totale del propellente ed il suo rapporto.

Così nell'esempio precedente per $R_F = 10$ si troverà un consumo totale, per $q = 1$ in tonnellate, di $C = 99$ tonnellate; di cui 9 si consumeranno nella *frenata* e 90 nell'*accelerata*.

Non sono cifre inaccettabili per un percorso di andata di 8 anni-luce; ma diventano impressionanti se si pensa al *ritorno*. Il rapporto di consumo si eleva una seconda volta al *quadrato* e diviene 10.000. Cioè 10.000 tonnellate per *una* sola di peso a vuoto finale. È già una grossa petroliera. Ma una tonnellata di peso a vuoto è una cifra di riferimento comoda ai calcoli. Se mettessimo, modestamente, *sei* tonnellate di peso a vuoto si passerebbe dalla petroliera alla «Forrestal», la portaerei americana. E sarebbe ardito pensare di lanciarla nello spazio come cosmonave in partenza per la stella Sirio.

D'altra parte il ritorno sarà, a me sembra, una *conditio sine qua non*. E credo che non convenga sorpassare un rapporto di carico complessivo dell'ordine di grandezza di quello adoperato per l'attuale satellite artificiale, che supera il migliaio.

Ponendo allora $R^4 = 1300$ in cifra tonda si ottiene $R_f = 6$. Che fornisce con l'uso delle (7) $\alpha n \cong 2,08$; e richiede perciò di abbandonare l'ipotesi di $\alpha = 1$ e scegliere un valore minore, per esempio $\alpha = 0,26$ che ci dà una distanza in anni-luce doppia; cioè $2n = 16$.

Noi possiamo allora pensare possibile di varcare la distanza di 16 anni-luce che ci separa dalla stella *Altair* e che può considerarsi il raggio di una sfera comprendente quasi *cinquanta* stelle.

Ma vi è una sorpresa. Il nuovo valore di α , secondo la (12), modifica nello stesso senso il valore di τ_e cioè del tempo proprio relativistico dell'equipaggio. Per $R_f = 6$ questo tempo risulterebbe ora di circa 1,79 anni se si tenesse $\alpha = 1$ ma per $\alpha = 0,26$ diviene di poco meno di 7 anni; e il quadruplo di questo tempo, occorrente all'andata e ritorno, sale a poco meno di 28 anni.

Si viene così a frustrare il vantaggio della relatività. Il tempo terrestre del viaggio secondo, la (8) o la (9), è poco meno di 45 anni: e il vantaggio della relatività lo porta ora soltanto a 28 anni.

È una esigenza di natura realistica, che viene a falciare l'idealistica. Essa oppone alla barriera della vita fisiologica, come è stato rilevato da altri commentatori, un altro ostacolo fondamentale: la *barriera del consumo*. La *dilatazione*, ∇ , della vita dell'equipaggio è circa la metà del rapporto, R , di consumo; e quindi nello schema convenzionale che è stato illustrato si perviene assai presto, crescendo ∇ , a valori di R^4 (gita e ritorno) tecnicamente impossibili. Tenendo poi presente che in detto schema convenzionale è stato adottato come velocità di getto un valore *limite*, se ne conclude che il percorso di 16 anni-luce, raggio della sfera contenente 50 stelle, è esso stesso da considerarsi come limite di applicabilità di tale schema convenzionale a viaggi interstellari di andata e ritorno che si vogliano compiere durante la vita media di un uomo.

Se tuttavia si abbandona lo schema convenzionale, che suppone *accelerazione costante* lungo tutto il percorso; e si adotta invece uno schema misto, introducendo un tratto intermedio a *velocità costante*, si perviene agevolmente a più ampie possibilità cosmonautiche, pur conservando lo stesso rapporto di consumo e lo stesso tempo proprio dell'equipaggio. I percorsi limiti risultano allora più che doppi.

Eccone la dimostrazione.

Chiamiamo sempre con n la distanza in anni-luce di mezzo viaggio di andata; τ il tempo terrestre necessario a percorrerla, τ_e il tempo proprio

dell'equipaggio, relativisticamente calcolato. Sia allora, in anni-luce, n_1 il tratto ad accelerazione costante ed n_2 quello a velocità costante. La metà del viaggio di andata sarà

$$(15) \quad n = n_1 + n_2$$

Adottando allora gli stessi indici per i tempi dell'equipaggio, scriveremo analogamente

$$(16) \quad \tau_e = \tau_{e1} + \tau_{e2}$$

Sia ora β_1 , il rapporto della velocità raggiunta alla fine del percorso *uniformemente accelerato*, n_1 rispetto alla velocità c della luce; e supponiamo che tale rapporto si mantenga costante durante il percorso, n_2 , a *velocità uniforme*. Indicando allora con τ_2 il tempo astronomico impiegato a percorrerlo; e ricordando il significato del simbolo ∇ che indica la dilatazione del tempo astronomico τ rispetto a quello dell'equipaggio τ_e ; potremo scrivere

$$n_2 = \beta_1 \tau_2 = \beta_1 \nabla_1 \tau_{e2}$$

E, poiché dalla (2) e dalla (10) si ricava

$$(17) \quad \beta_1 \nabla_1 = \frac{R_1^2 - 1}{2R_1}$$

dove R_1 è il totale rapporto di consumo impiegato a percorrere il tratto n_1 , potremo anche scrivere, in definitiva

$$(18) \quad n_2 = \frac{R_1^2 - 1}{2R_1} \tau_{e2}$$

dove τ_{e2} dovrà risultare il massimo possibile; e quindi per la (16) dovrà risultare minimo τ_{e1} .

Ora si ha

$$(19) \quad \tau_{e1} = \frac{\ln R_1}{\alpha}$$

quindi α dovrà tenersi più grande che si può. Sarà conveniente tecnicamente non superare l'ordine di grandezza $\alpha = 1$. In tale ipotesi si ricava subito il valore di n_1 dalla (15); cioè

$$(20) \quad n_1 = \frac{(R_1-1)^2}{2R_1}$$

Faremo ora l'ipotesi che si voglia tenere lo stesso R_1 dello schema convenzionale dianzi esemplificato; e lo stesso tempo dell'equipaggio, τ_e .

Si ricaverà subito, per la (16),

$$\tau_{e2} = \tau_e - \tau_{e1}$$

e ricavando τ_{e1} dalla (19) per $\alpha = 1$ si otterrà in definitiva, dalla (18) e dalla (20):

$$(21) \quad n = n_1 + n_2 = \frac{(R_1-1)^2}{2R_1} + \frac{R_1^2-1}{2R_1} (\tau_e + \ln R_1)$$

che ci indica il massimo n raggiungibile per un determinato rapporto di consumo, R_1 ; e per un determinato valore, τ_e , del tempo proprio dell'equipaggio.

Come si vede l'espressione (21) non può però considerarsi, in questo schema misto, alla stessa stregua della (7) riguardante lo schema convenzionale ad accelerazione costante. In altri termini nella (7) il simbolo R è una variabile che si misura in qualsiasi momento del viaggio e corrisponde al cammino an già percorso sino a quel momento. Qui al posto della variabile si trova R_1 , che si riferisce al consumo effettuato alla fine del percorso accelerato, genericamente già indicato con R_r . Sino a quel momento vale soltanto il primo termine del secondo membro della (21) e in esso si può sostituire la variabile R al posto della costante finale R_1 ; e servirsi di tale sostituzione per adoperare la (21) allo stesso modo della (7); salvo a porre $\alpha = 1$

Ma, superato quel momento ed iniziata la navigazione uniforme, non c'è più consumo; ed il resto del percorso non è più misurabile senza la conoscenza del tempo relativistico τ_e ; che nella (21) rappresenta il tempo totale del viaggio, al quale può

sostituirsì il suo valore variabile deducendolo dagli orologi di bordo. È questo uno svantaggio tecnico dello schema misto rispetto allo schema convenzionale ad accelerazione costante. Qui non basta più il consumo a fornire una *navigazione stimata*; ma occorre, in moto a velocità uniforme, anche la conoscenza del tempo relativistico.

Chiarito questo punto, passiamo a calcolare invece il vantaggio che se ne ricava nelle possibilità limiti di percorso.

Per il confronto conviene adottare lo stesso tempo proprio $z_e = 6,89$ dell'esempio numerico precedente; che, per $R = R_F = 6$, forniva $n = 8$ anni-luce; con $\alpha = 0,26$.

Ponendo quindi nella (21), dove è già implicita l'accelerazione $\alpha = 1$, i valori $R_l = 6$ per il rapporto di consumo; e $\tau_e = 6,89$ per il tempo proprio dell'equipaggio di mezzo percorso di andata, corrispondente a circa 28 anni per l'intero viaggio, si ottiene subito:

$$n = 2,08 + 2,92 [6,89 - 1.792] \approx 17 \text{ anni-luce};$$

cioè più che doppio, a parità di R e di τ_e , di quanto può dare lo schema convenzionale. Si possono così varcare tutte le distanze spaziali contenute in una sfera di 34 anni-luce come raggio; che si può presumere contenga, in proporzione al suo volume, quasi 480 stelle invece delle 50 stelle contenute nella sfera il cui raggio sia di 16 anni-luce.

Si deve concludere che maggiori distanze interstellari restino invalicabili dall'uomo durante la sua vita media? Sarebbe come sottovalutare le risorse del suo intelletto. Il pensiero umano ha saputo contenere per i suoi fini esistenziali la immensa prodigalità della Natura. La Natura dell'Universo non ha bisogno di risparmiare. Tutto l'Universo è entropico. Le Stelle ardono a milioni di gradi, *disperdendo* il loro calore nell'Universo; a meno di qualche miliardesimo. Il fulmine, sul nostro minuscolo pianeta, scocca *invano* fra nube e terra e si dissipa in calore. Il razzo stesso, che abbiamo scelto come mezzo di locomozione spaziale, è prodigalmente entropico. Già l'uomo pensa di utilizzare, colla propulsione ionica, una forma di energia concettualmente privilegiata, dove il voltaggio elettrico sostituisca la temperatura.

Ma ciò non basta alla Cosmonautica; intralciata, come è, dall'enorme gettito di propellente necessario a maggiori trasferte.

Occorrerebbe abbandonare, almeno parzialmente, gli schemi di propulsione ove il gettito è tutto materiato dal carico di bordo; e cercare soprattutto in partenza di raccogliere il propellente lungo il cammino; come fa l'Aviazione a getto quando raccoglie aria dalla atmosfera. Forse un giorno si riuscirà ad utilizzare analogamente la materia interstellare. Ma basterebbe forse di farlo entro i confini della ionosfera terrestre, nello stadio di avviamento che consuma la massima parte del carico di bordo.

Si potrebbe così riservare l'alimentazione *endogena* del getto propulsivo allo stadio dell'inversione finale di marcia ed usufruire dell'alimentazione *esogena* per partire dalla Terra e frenare alla rientrata. Gli stadi intermedi sarebbero percorsi a velocità uniforme senza consumo; e le totali distanze varcabili consentirebbero di scegliere le ricognizioni entro una sfera contenente oltre 20.000 stelle. E la più lontana non richiederebbe oltre 28 anni di vita dell'equipaggio per andare e tornare.

Utopia?

Potrei rispondere, come ha detto un grande pensatore, che tutta la nostra civiltà è sbocciata dall'utopia. Dirò invece che ritengo più saggio accantonare queste anticipazioni sino a che non avremo tentato e concretato tutte le altre che le precedono nelle vie dello spazio; le quali, anche se appaiono modeste di fronte a più ambiziosi disegni del pensiero, sono già dense di per se stesse di formidabili problemi tecnici di cui nessuno si può dire ancora risoluto.

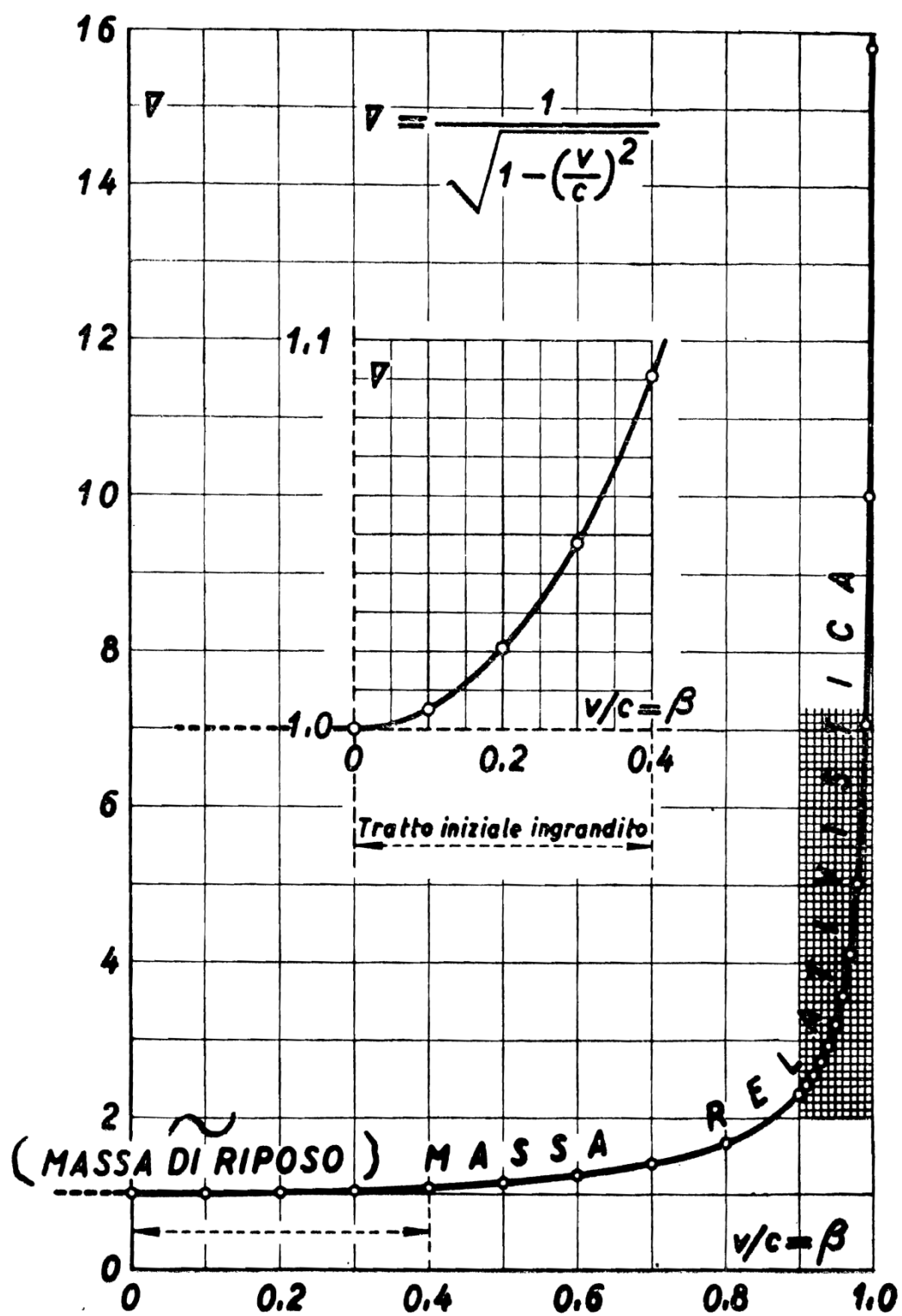


FIG. 1

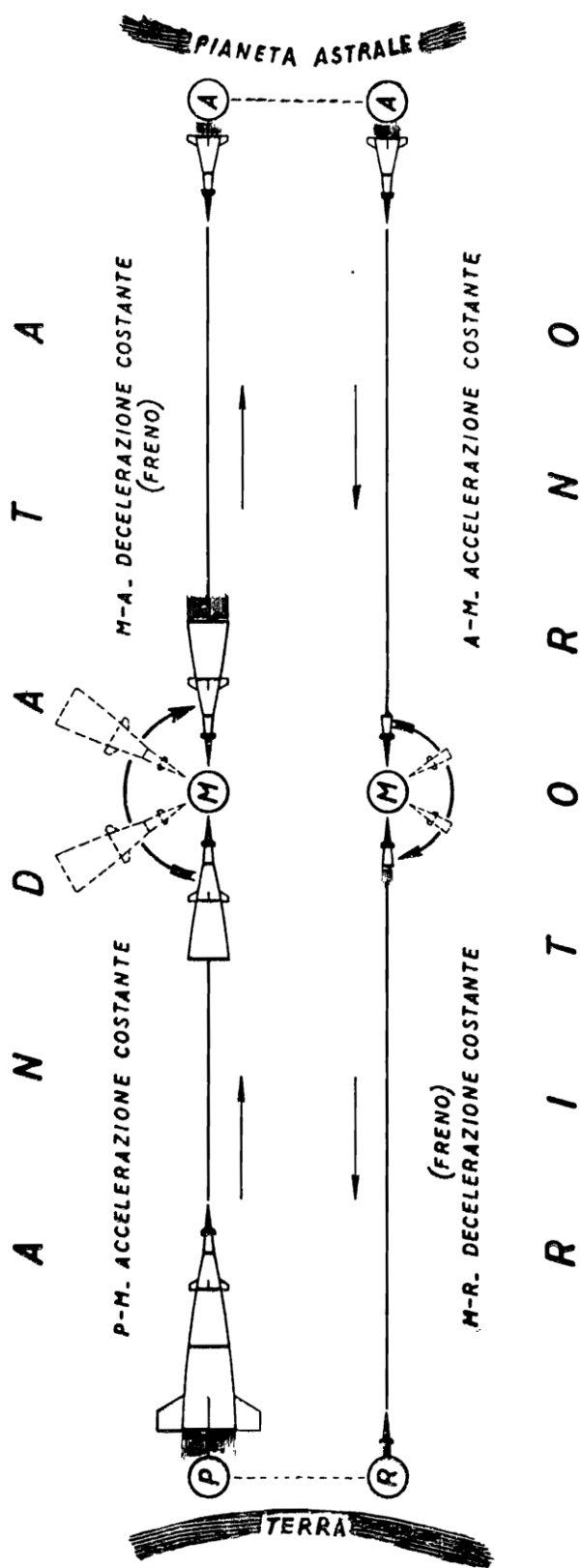


FIG. 2

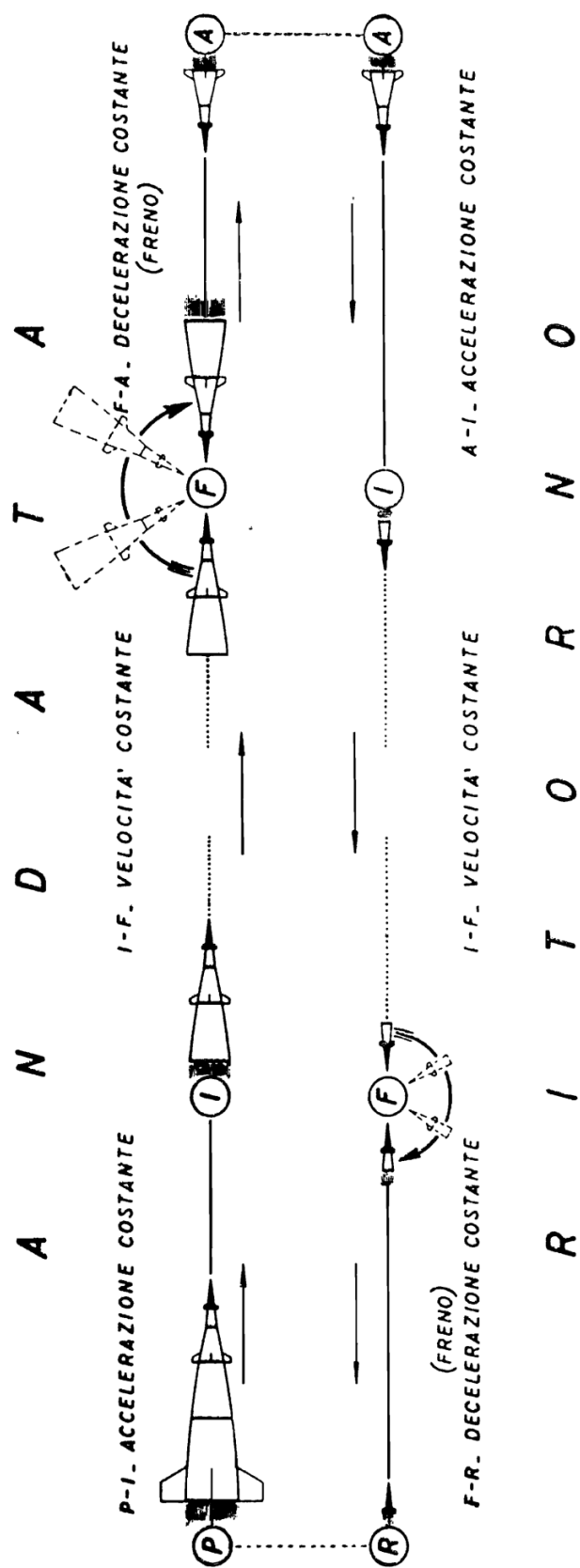


Fig. 3